Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Παράδειγμα 1

Έστω η ευθεία στον $\mathbb{R}^2$ $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Λέμε ότι η ευθεία είναι ρητά δοσμένη ($y = f(x) = \alpha x$)

Τα σημεία της ευθείας είναι τα σημεία του συνόλου

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - \alpha x = 0\}$, δηλ οι λύσεις της

εξίσωσης $F(x,y) = 0$.

Λέμε τότε ότι η ευθεία είναι πεπλεγμένα δοσμένη

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y - \alpha x) = 1 \neq 0.$$

Από την άλλη, αν $\alpha \to +\infty$, η ευθεία γίνεται (στο όριο) $x = 0$, δηλ

$$G(x,y) := x = 0, \text{ με } \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω δυο περιπτώσεις βλέπουμε ότι το σύνολο $F(x,y) = 0$, μπορεί να γραφεί ως γράφημα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δηλ $y = f(x)$, ενώ το σύνολο $G(x,y) = 0$, δε μπορεί να γραφεί ως γράφημα συνάρτησης του x.

Παράδειγμα 2.

$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

$\nabla F(x,y) = 2(x,y)$, και βλέπουμε ότι για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ εκτός από αυτά με $y=0$, μπορούμε να γράψουμε

$y(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$ και $y'(x) = \dfrac{-x}{\pm\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{y(x)}$

$\xrightarrow[x \to 1^-]{} -\infty$

Επίσης παρατηρούμε ότι δε μπορούμε να γράψουμε τις λύσεις της $F(x,y)=0$ ρητά ως συναρτήσεις του x, γύρω από τα σημεία $x = \pm 1$

Πρόταση (γενίκευση των παραπάνω).

Έστω $F : (\alpha, b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$, συνεχώς διαφορίσιμη.

και $(x_0, y_0) \in (\alpha,b)\times(c,d)$ με $F(x_0,y_0) = 0$ και

$\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$.

Τότε $\exists\, \delta, \varepsilon > 0$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (\alpha,b)$ $\exists!\, g(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0+\varepsilon) \subset (c,d)$, έτσι ώστε $F(x,g(x)) = 0$

και $g : (x_0-\delta, x_0+\delta) \to (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ είναι συν. διαφ/μη με $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$ και $g'(x) = \dfrac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}$,

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Π.χ $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

Έχουμε $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι C^1. Έστω $x_0^2 + y_0^2 = 1$

και $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$

Τότε $\exists$ περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, έτσι ώστε

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\exists!$ $g(x) \left(= \sqrt{1 - x^2}\right)$ με την ιδιότητα

$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \subset (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, που ικανοποιεί την

$x^2 + g^2(x) = 1$ και $g'(x) = \dfrac{-2x}{2g(x)} = -\dfrac{x}{g(x)} = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$